المدرسة الوطنية للمهندسين بتونس

école nationale d'ingénieurs de Tunis

Année universitaire : 2012/2013		Test	☐
Semestre : **1**		Examen	☑
Module : **Equations Différentielles et Automatique**		Date : 9 Janvier 2013	
Enseignant : M. Moakher		Durée : 1H30	
Groupe : **1ère année MIndS**		Documents autorisés	☐
Barème : Non précisé		Documents non autorisés	☑
Nombre de pages : 2			

Système dynamique de Lorenz

En 1963, Edward Lorenz a développé un modèle mathématique simplifié pour la convection atmosphérique. Ce modèle est formulé comme un système de trois équations différentielles ordinaires, connu sous le nom *système de Lorenz*, donné par:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \tag{1}$$

où $\sigma > 0$, $r > 0$ et $b > 0$ sont des paramètres.

1. Montrer que le problème de Cauchy consistant du système différentiel (1) et une condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ admet une unique solution.

2. Montrer que, quels que soient les valeurs des paramètres b, r et σ, le point $P = (0,0,0)$ est un point d'equilibre du système (1).

3. Linéariser le système (1) autour du point d'équilibre P et étudier sa satbilité.

4. Montrer que, pour $r < 1$, la fonction $V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sigma}{2}(y^2 + z^2)$ est une fonction de Lyapunov stricte du système (1) autour de P.

5. Montrer que, pour $r = 1$, la fonction $V(x,y,z)$ est une fonction de Lyapunov du système (1) autour de P. Que peut-on dire sur la stabilité de P dans ce cas?

6. Montrer que pour $r > 1$, le système (1) admet deux autres points d'équilibre $P^{\pm} = (\pm x^*, \pm y^*, z^*)$ où x^*, y^* et z^* sont des constantes qu'on explicitera en fonction des paramètres.

7. On note par $A^{\pm}$ les matrices associées aux systèmes linéaires obtenus par linéarisation de (1) autour des points d'équilibre $P^{\pm}$.

   (a) Expliciter les matrices $A^{\pm}$.

   (b) Montrer que, pour les deux matrices $A^{\pm}$, le polynôme charactéristique est donné par

   $$p(\lambda) = \lambda^3 + (1 + b + \sigma)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0. \tag{2}$$

   Dans la suite, on notera par a_2, a_1 et a_0 les coefficients de λ^2, λ et le terme constant de $p(\lambda)$.

(c) Noter que l'équation charactéristique $p(\lambda) = 0$ s'écrit aussi

$$\lambda(\lambda^2 + b(r + \sigma)) = -(1 + b + \sigma)\lambda^2 - 2b\sigma(r - 1). \tag{3}$$

En déduire que si λ est une racine réelle alors $\lambda < 0$.

(d) On admet que $p(\lambda) = 0$ ne peut pas avoir trois racines réelles. Soit λ_1 la racine réelle et $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ une paire de racines complexes conjuguées de $p(\lambda) = 0$. Montrer que

$$\begin{aligned} -(2\alpha + \lambda_1) &= (1 + b + \sigma), \\ (2\alpha\lambda_1 + \alpha^2 + \beta^2) &= b(r + \sigma), \\ -\lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) &= 2b\sigma(r - 1). \end{aligned}$$

(e) Vérifier que

$$a_0 - a_1 a_2 = 2\alpha((\lambda_1 + \alpha)^2 + \beta^2).$$

En déduire que $\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}(\lambda_{2,3})) = \operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(a_0 - a_1 a_2)$.

(f) On suppose maintenant que $\sigma > b + 1$. Montrer que les points d'équilibre $P^{\pm}$ sont stables si $r < r_c$ et instables si $r > r_c$ où $r_c = \sigma\dfrac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$. Que peut-on dire sur la stabilité des points d'équilibres $P^{\pm}$ quand $r = r_c$?

8. Retrouver le résultat précédent concernant la stabilité des points d'équilibe $P^{\pm}$ en utilisant le:

Critère de Hurwitz: Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ un polynôme de degré 3 à coefficients a_i réels avec $a_0 > 0$. Alors toutes les racines du polynôme, $p(x) = 0$, ont partie réelle strictement négative si et seulement si tous les 3 déterminants suivants sont strictement positifs

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}.$$